ДОПОЛНЕНІЕ КЪ ЗАМѢТКѢ О СХОДИМОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХЪ ДРОБЕЙ.

И. В. Слешинскаго.

Позволю себѣ сообщить здѣсь теорему, въ которой прежде сообщенная содержится какъ частный случай.

Дробь

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2} + \ldots}$$

сходится, если

$$|a_n| \geqq 1 + |b_n|. \tag{1}$$

Доказательство. Означивъ числитель и знаменатель n-ой подходящей дроби соотвѣтственно чрезъ P_n и Q_n, имѣемъ:

$$Q_0 = 1,\ Q_1 = a_1,\ Q_n = a_n\ Q_{n-1} + b_n Q_{n-2} \tag{2}$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_1}{Q_0 Q_1} - \frac{b_1 b_2}{Q_1 Q_2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{Q_{n-1} Q_n}. \tag{3}$$

Введемъ обозначенія:

$$|a_n| = \alpha_n,\quad |b_n| = \beta_n,\quad |Q_n| = \Omega_n.$$

По (1) будетъ:

$$\alpha_n \geqq 1 + \beta_n. \tag{4}$$

Докажемъ прежде всего неравенство

$$\Omega_n - \Omega_{n-1} \geqq \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n. \tag{5}$$

Для $n = 1$ оно провѣряется непосредственно. Допустивъ, что

$$\Omega_{n-1} - \Omega_{n-2} \geqq \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1},$$

имѣемъ

$$\Omega_{n-1} \; \Omega_{n-2}$$

и, по (4),

$$\alpha_n \Omega_{n-1} \; \beta_n \Omega_{n-2}.$$

Поэтому, на основаніи (2),

$$\Omega_n \geqq \alpha_n \Omega_{n-1} - \beta_n \Omega_{n-2}.$$

Слѣдовательно, по (4),

$$\Omega_n - \Omega_{n-1} \geqq (\Omega_{n-1} - \Omega_{n-2}) \beta_n.$$

Отсюда, пользуясь допущеніемъ, находимъ:

$$\Omega_n - \Omega_{n-1} \geqq \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$$

т.-е. неравенство (5) доказано.

Изъ него слѣдуетъ, что

$$\frac{\beta_1 \beta_1 \ldots \beta_n}{\Omega_{n-1} \Omega_n} \leqq \frac{1}{\Omega_{n-1}} - \frac{1}{\Omega_n}.$$

Отсюда

$$\frac{\beta_1}{\Omega_0 \Omega_1} + \frac{\beta_1 \beta_2}{\Omega_1 \Omega_2} + \ldots + \frac{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}{\Omega_{n-1} \Omega_n} \leqq 1 - \frac{1}{\Omega_n}$$

Но, по (5),

$$\Omega_n > 1.$$

Слѣдовательно лѣвая часть неравенства остается всегда меньше 1. Сравнивъ ее съ правой частью равенства (3), заключаемъ, что конечный рядъ, выражающій $\frac{P_n}{Q_n}$, будучи продолженъ до безконечности, сходится абсолютно, т. е. непрерывная дробь сходится.

Дробь

$$\cfrac{c_1}{1+\cfrac{c_2}{1+\ldots}},$$

если $|c_n| \leqq \frac{1}{4}$, т.-е. $c_n = \frac{b_n}{4}$, гдѣ $|b_n| \leqq 1$, можно привести къ виду

$$\cfrac{\frac{b_1}{2}}{2+\cfrac{b_2}{2+\cfrac{b_3}{2+\ldots}}}$$

Приложивъ къ этой дроби доказанную выше теорему, видимъ, что она сходится. Въ частности, если $\lim\limits_{n=\infty} c_n = 0$, можно отбросить столько начальныхъ звеньевъ, чтобы для остальныхъ выполнялось условіе $|c_n| \leqq \frac{1}{4}$. Поэтому такая дробь будетъ всегда сходиться. Это и есть теорема, доказанная въ предыдущей замѣткѣ.

Примѣчаніе. Опредѣленіе сходимости непрерывной дроби, предложенное въ предыдущей статьѣ, шире общепринятаго и употреблено съ цѣлью упрощенія выраженія теоремы, составляющей предметъ замѣтки и состоящей въ томъ, что подходящая дробь непрерывной дроби

$$1+\cfrac{c_1}{1+\cfrac{c_2}{1+\ldots}},$$

гдѣ $\lim c_n = 0$, или имѣетъ предѣлъ, или возрастаетъ безпредѣльно, но не можетъ колеблясь не имѣть предѣла.